৯ম-১০ম শ্রেণি

সাধারণ গণিত

আলোচ্য বিষয়

অধ্যায় ৬ – রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ

ব্যবহারবিধি

দেখে নাও এই অধ্যায় থেকে কোথায় কোথায় প্রশ্ন এসেছে এবং সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনীর গুরুত্ব।

কুইক টিপস

সহজে মনে রাখার এবং দ্রুত ক্যালকুলেশন করতে সহায়ক হবে।

বহুনির্বাচনী (MCQ)

বিগত বছর গুলোতে বোর্ড, স্কুল, কলেজ এবং বিশ্ববিদ্যালয়ে আসা বহুনির্বাচনী প্রশ্ন দেখে নাও উত্তরসহ।

সৃজনশীল (CQ)

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল দেখে নাও উত্তরসহ।

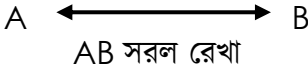
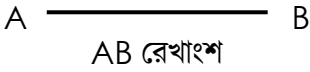
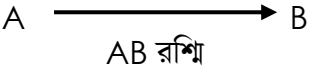
প্র্যাকটিস

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সমস্যাগুলো প্র্যাকটিস করে নিজেকে যাচাই করে নাও।

উত্তরমালা

প্র্যাকটিস সমস্যাগুলোর উত্তরগুলো মিলিয়ে নাও।

উদাহরণ

টপিক সংক্রান্ত উদাহরণসমূহ।

সূত্রের আলোচনা

সূত্রের ব্যাপারে বিস্তারিত জেনে নাও।

টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী

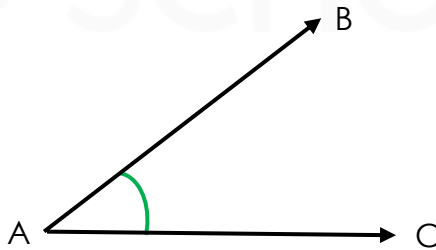
সম্পূর্ণ অধ্যায়ের সুসজ্জিত আলোচনা।

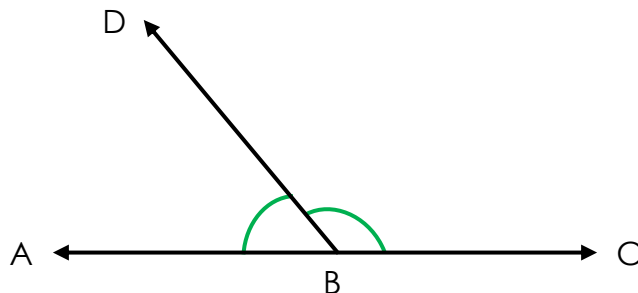
রেখা, রেখাংশ ও রশ্মির মধ্যে পার্থক্য:

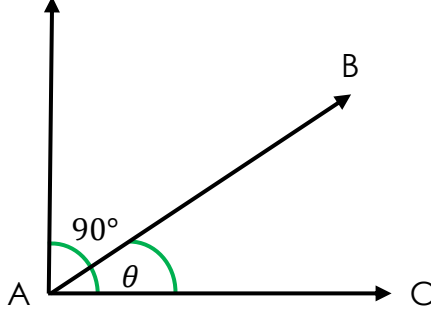
রেখা	রেখাংশ	রশ্মি
একটি রেখার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই।	রেখাংশের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য আছে।	একটি রশ্মির নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নেই।
একটি রেখার প্রান্ত বিন্দু নেই।	"রেখাংশের দুটি প্রান্ত বিন্দু আছে।"	"একটি রশ্মির মাত্র একটি প্রান্ত বিন্দু আছে।"
A B AB সরল রেখা	A B AB রেখাংশ	A B AB রশ্মি

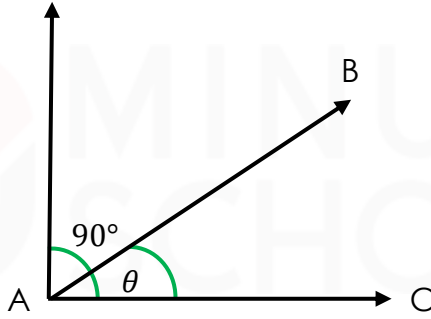
কোণ সম্পর্কিত সংজ্ঞা সমুহ

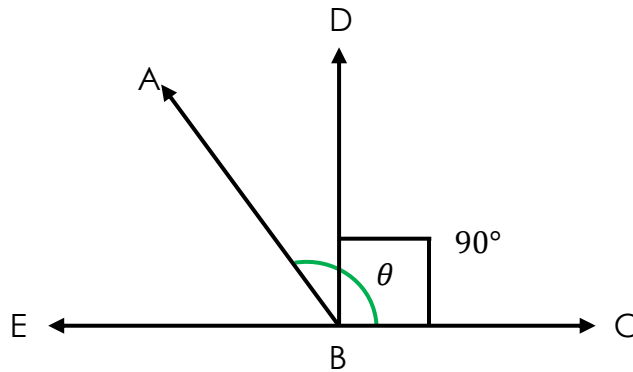
কোণ (Angle): একই সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং এদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে।

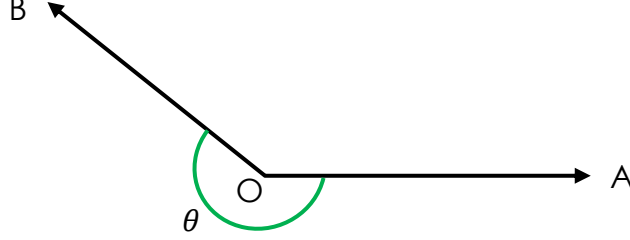
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে AB ও AC রশ্মির প্রান্তবিন্দু A তে উৎপন্ন কোনটিকে $\angle BAC$ বা $\angle CAB$ বা সংক্ষেপে $\angle A$ দ্বারা করা হয়। প্রান্তবিন্দু A কে কোণটির শীর্ষবিন্দু বলা হয়।

সন্নিহিত কোণ (Adjacent Angle): দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু এবং একটি সাধারণ বাহু/রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ বাহু/রশ্মি বিপরীত পাশে অবস্থান করে তবে ঐ কোণদুটিকে সন্নিহিত কোণ বলা হয়।

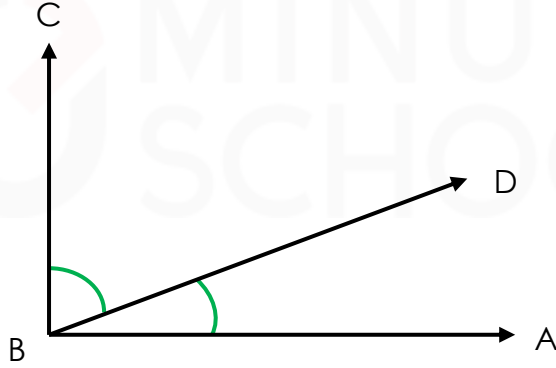
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে $\angle ABD$ ও $\angle CBD$ হল সন্নিহিত কোণ।

সূক্ষ্মকোণ (Acute Angle): এক সমকোণের চেয়ে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ বলা হয়। $[0° < \theta < 90°]$

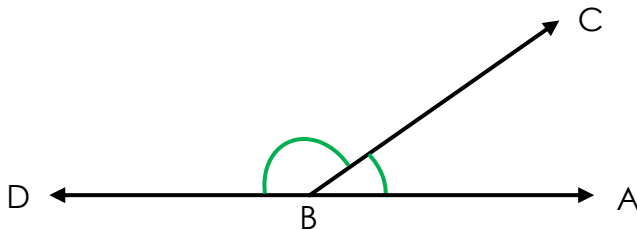
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে $\angle BAC$ এক সমকোণের চেয়ে ছোট। তাই $\angle BAC$ সূক্ষ্মকোণ।

সূক্ষ্মকোণ (Acute Angle): এক সমকোণের চেয়ে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ বলা হয়। $[0° < \theta < 90°]$

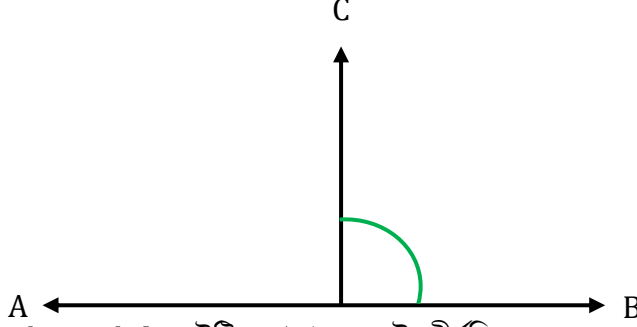
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে $\angle BAC$ এক সমকোণের চেয়ে ছোট। তাই $\angle BAC$ সূক্ষ্মকোণ।

স্থূলকোণ (Obtuse Angle): এক সমকোণের চেয়ে বড় কিন্তু দুই সমকোণের চেয়ে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়। $[90° < \theta < 180°]$

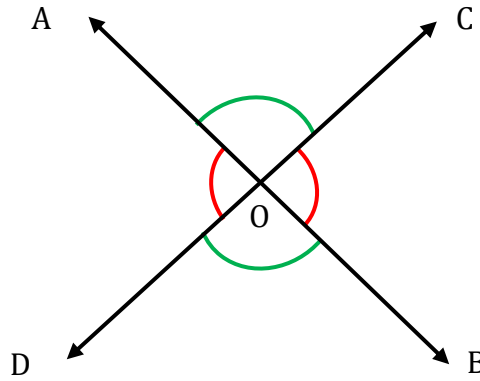
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে $\angle ABC$, এক সমকোণ $\angle DBC$ এর চেয়ে বড় কিন্তু দুই সমকোণ $(\angle DBC)$ – এর চেয়ে ছোট। তাই $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex Angle): দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়। $[180° < \theta < 360°]$

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, $\angle AOB$ একটি প্রবৃদ্ধ কোণ।

পূরক কোণ (Complementary Angle): দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হলে, ঐ দুটি কোণের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, সন্নিহিত $\angle ABD +$সন্নিহিত $\angle CBD = \angle ABC = 1$ সমকোণ। তাই $\angle ABD$ কোণ হল $\angle CBD$ –এর পরিপূরক কোণ। অথবা $\angle CBD$ হল $\angle ABD$-এর পরিপূরক কোণ।

সম্পূরক কোণ (Supplementary Angle): দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হলে, একটি কোণকে অপরটির সম্পূরক কোণ বলা হয়।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, সন্নিহিত $\angle ABC +$ সন্নিহিত $\angle CBD =$ দুই সমকোণ। তাই $\angle ABC$ হল $\angle CBD$-এর সম্পূরক কোণ। অথবা $\angle CBD$ হল $\angle ABC$-এর সম্পূরক কোণ।

সমকোণ (Right Angle): একটি সরলরেখার উপর আরেকটি সরল রেখা লম্বভাবে দন্ডায়মান হলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তারা সমান হলে তাদের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলা হয়। [সন্নিহিত কোণের মান =90°]

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, AB সরলরেখার উপর CD লম্ব। তাই সন্নিহিত $\angle ADC =$ সন্নিহিত $\angle BDC = 1$ সমকোণ বা $90°$।

বিপ্রতিপ কোণ (Vertical Angle): দুইটি কোণেরএকই শীর্ষবিন্দু হলে এবং একটি কোণের বাহুদ্বইয়ের বিপরীত রশ্মি হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের বিপ্রতিপ কোণ বলে।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, $\angle AOD$ ও $\angle COB$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ। অপরদিকে $\angle AOC$ ও $\angle DOB$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ

বৈশিষ্ট্য: বিপ্রতিপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান। $\angle AOD$ = বিপ্রতীপ $\angle COB$ এবং $\angle AOC$ = বিপ্রতীপ $\angle DOB$

Note: সাধারণত দুটি সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ করলে বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।

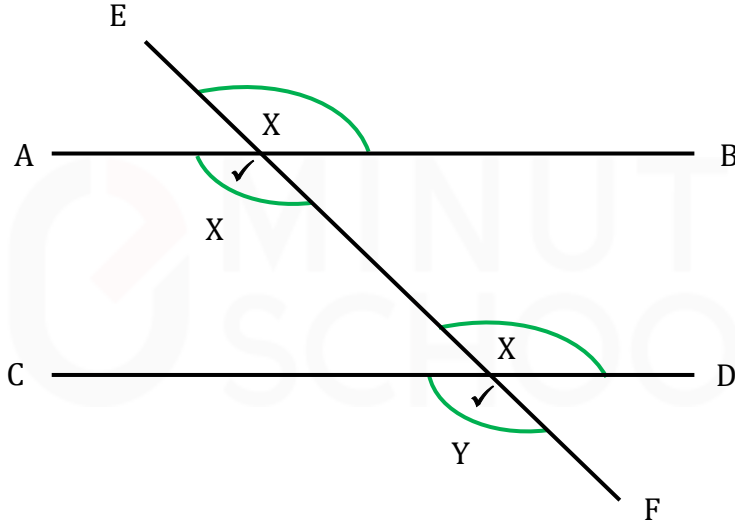
অনুরূপ কোণ (Corresponding Angle): দুটি সমান্তরাল সরল রেখাকে যদি অন্য একটি সরল রেখা ছেদ করে তবে উভয় রেখার ছেদ বিন্দুতে একই দিকে ও ছেদকারী রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাদেরকে পরস্পরের অনুরূপ কোণ বলে।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, দুটি সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CD। এদের ছেদ EF সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\angle FXA$ ও $\angle FYC$ পরস্পর অনুরূপ

$\angle BXE$ ও $\angle DYE$ পরস্পর অনুরূপ

অনুরূপ কোণগুলোর মান সমান হয়। অর্থাৎ

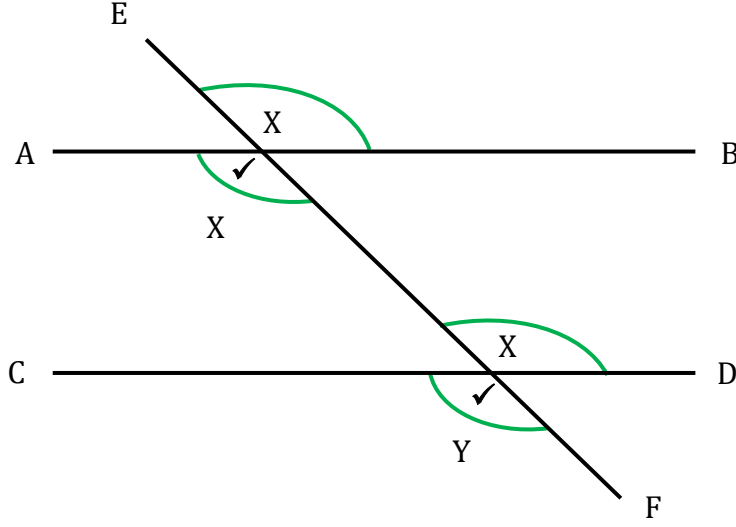
$\angle FXA = \angle FYC$ এবং $\angle BXE = \angle DYE$

একান্তর কোণ (Alternate Angle): দুটি সমান্তরাল সরল রেখাকে যদি অন্য একটি সরল রেখা ছেদ করে তবে ছেদকারী রেখার উভয় পার্শ্বের রেখা দুটির সাথে যেদুটি বিপরীতমূখী কোণ উৎপন্ন হয় তাদের প্রতিটি কোণকে অপর কোণের একান্তর কোণ বলে।

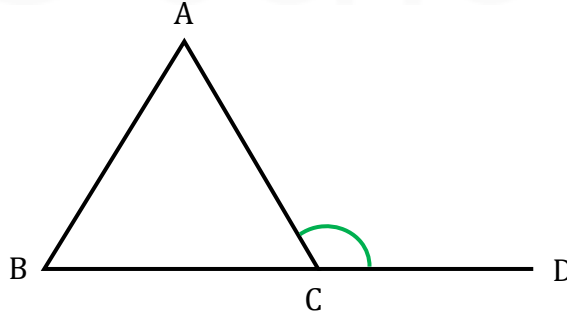
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, দুটি সমান্তরাল সরলরেখা AB ও CD-এদের ছেদক EF. ইহা রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করেছে।

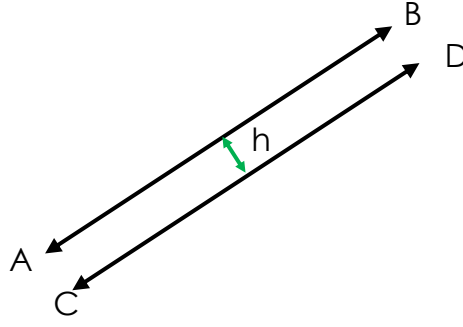
$\angle FXB$ ও $\angle CYE$ পরস্পর একান্তর

$\angle AXF$ ও $\angle DYE$ পরস্পর একান্তর

অনুরূপ কোণগুলোর মান সমান হয়। অর্থাৎ

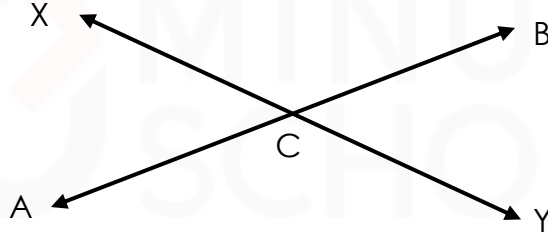
$\angle FXB = \angle CYE$ এবং $\angle AXF = \angle DYE$

বহিঃস্থ কোণ: কোনো ত্রিভুজের যে কোনো একটি বাহুকে করলে ত্রিভুজের বাইরে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাকে বহিঃস্থ কোণ বলা হয়।

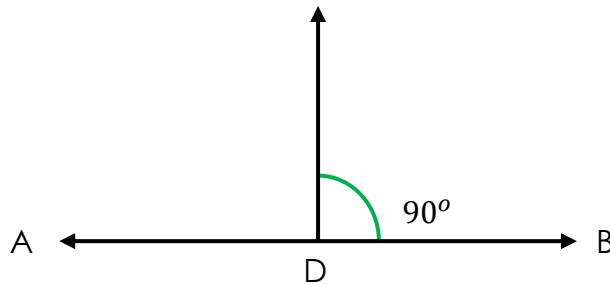
সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, ΔABC-এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ত্রিভুজের বাইরে $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়েছে। তাই $\angle ACD$, ΔABC-এর বহিঃস্থ কোণ।

সমান্তরাল সরলরেখা: যদি দুটি সরলরেখা পাশাপাশি সর্বদা সমান দূরত্ব বজায় রেখে অবস্থান করে তবে ঐ রেখাদ্বয়কে সমান্তরাল রেখা বলা হয়।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর সর্বদা h দুরত্ব বজায় রেখে অবস্থান করছে। তাই AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল সরল রেখা। AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরল্রেখাকে প্রকাশ করা হয় এভাবে $AB||CD$.

Note: দুইটি রেখার মধ্যে দুরত্ব বুঝাতে সাধারণত লম্বিক দূরত্বকে বুঝায়।

ছেদক (Intersector): যদি একটি রেখা অপর একটি রেখাকে যে কোন একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে একটি রেখাকে অপরটির ছেদক বলা হয়।

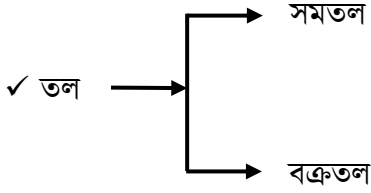
অথবা, দুইটি রেখার মধ্যে কেবল একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু থাকলে একটি রেখাকে অপরটির ছেদক বলে।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, AB রেখাকে XY রেখাটি C বিন্দুতে করেছে। তাই XY হল AB রেখার ছেদক।

লম্ব (Perpendicular): পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ একসমকোণ অর্থাৎ $90°$ হলে, একটি রেখাকে অপরটির উপর লম্ব বলা হয়।

সচিত্র ব্যাখ্যা: চিত্রে, পরস্পরছেদী AB ও CD রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\angle ADC = \angle BDC = 90°$। সুতরাং $CD \perp AB$ বা $AB \perp CD$।

কোণ সম্পর্কিত সংজ্ঞা সমূহ

✓ তল দ্বিমাত্রিক, এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে।

✓ গোলকের উপরিভাগ একটি তল।

✓ বিন্দুকে শূণ্য মাত্রার সত্তা (entity) বলে গণ্য করা হয়।

✓ কোন স্থানের উপসেট নয়।

✓ জগত/স্থান (Space) বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এ সেটের উপসেট।

ইউক্লিডি স্বীকার্য

ইউক্লিড প্রদত্ত স্বীকার্য পাঁচটি। যথা:

স্বীকার্য ১: একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরল রেখা আকা যায়।

স্বীকার্য ২: খন্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩: যে কোন কেন্দ্র ও যে কোন ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪: সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫: একটি সরলরেখা দুটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুইসমকোণের চেয়ে কম হলে রেখা দুইটিকে সমভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম সেদিকে মিলিত হয়।

প্রতিজ্ঞার চারটি অংশ থাকে:

১। সাধারণ নির্বচন (General enunciation)

২। বিশেষ নির্বচন (Particular enunciation)

৩। অঙ্কন (Construction)

৪। প্রমাণ (Proof)

ত্রিভুজের সর্বসমতা

বাহু - কোণ – বাহু উপপাদ্য:

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুটি পস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

বাহু - বাহু – বাহু উপপাদ্য:

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

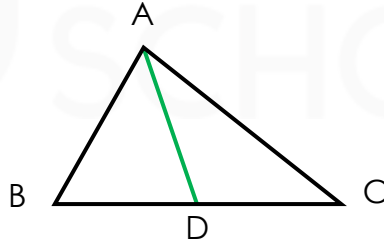
কোণ - বাহু – কোণ উপপাদ্য:

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং এদের সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

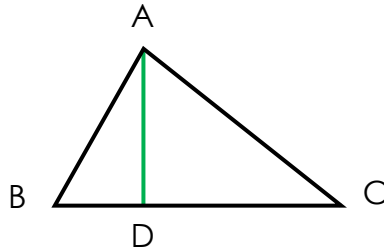
অতিভুজ - বাহু উপপাদ্য:

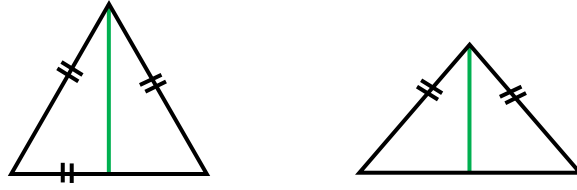
দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

মধ্যমা:

ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে।

চিত্রে ΔABC এর মধ্যমা AD

উচ্চতা:

যেকোনো শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহু এর লম্ব দুরত্বই ত্রিগুজের উচ্চতা।

চিত্রে ΔABC এর উচ্চতা বা লম্ব AD

Note: শুধুমাত্র সমবাহু ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে মধ্যমা ও উচ্চতা সমান হয়।

সাংকেতিক চিহ্ন

ভাষা সংক্ষেপ করার জন্য ব্যবহৃত কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতীক বা সাংকেতিক চিহ্ন:

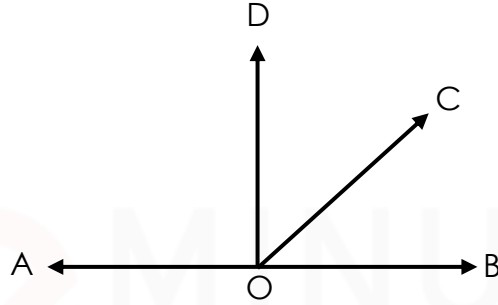
বিষয়	প্রতিক/সংকেত	বিষয়	প্রতিক/সংকেত
সুতরাং	$\therefore$	চতুর্ভুজ	▭
যেহেতু	$\because$	বৃত্ত	○
সমান	$=$	লম্ব	$\perp$
সমান নয়	$\neq$	সমান্তরাল	$\|\|$
কোণ	$\angle$	সর্বসম	$\cong$
বৃহত্তর	$>$	পরিধি	○
ক্ষুদ্রতর	$<$	বৃহত্তর বা সমান	$\geq$
ত্রিভুজ	Δ	ক্ষুদ্রতর বা সমান	$\leq$
ডিগ্রি	$^\circ$	বৃত্তচাপ	⌒
মিনিট	$'$	রেখা	⟷
সেকেন্ড	$''$	রশ্মি	⟶
		রেখাংশ	—

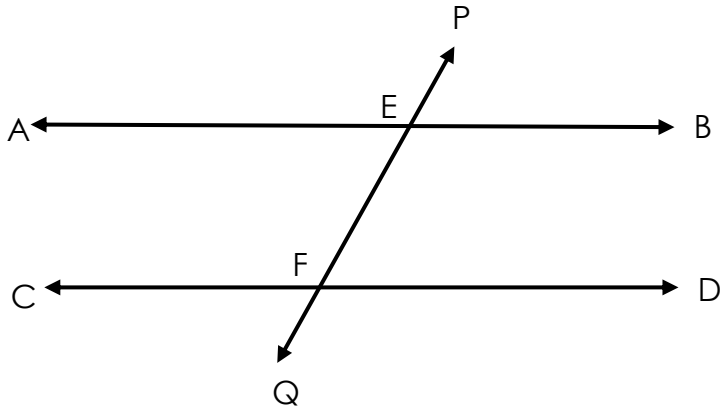
✓ বাহুভেদে ত্রিভুজ ৩ প্রকার।

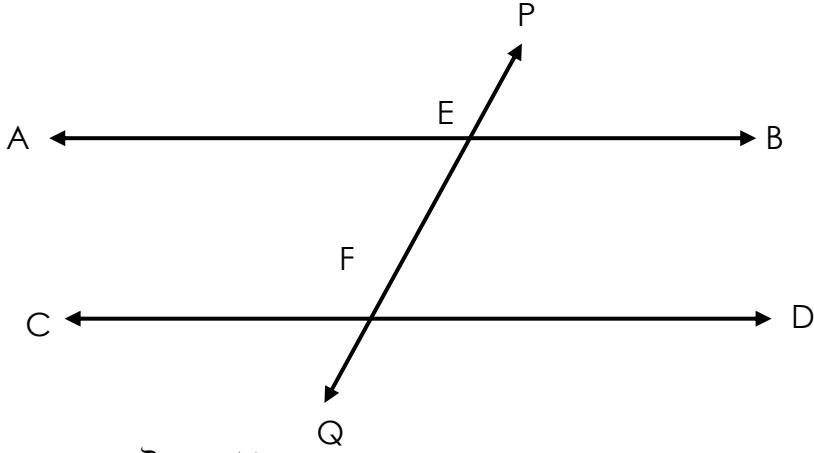
✓ কোণভেদে ত্রিভুজ ৩ প্রকার।

সূত্রের আলোচনা

ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যের সূত্রসমূহ:

১। একটি সরলরেখার একটি বিন্দুতে অপর একটি রশ্মি মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় এদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

এখানে, $\angle AOD + \angle DOB = 180°$।

২। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

এখানে, $\angle BEF + \angle EFD = 180°$।

৩। দুইটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের যোগফল দুইসমকোণের সমান হয়,তবে ঐ সরল সেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

এখানে, $\angle BEF + \angle EFD =$দুই সমকোণ।

সুতরাং $AB || CD$

৪। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

৫। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়েরসমষ্টির সমান।

৬। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের সুক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

৮। ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তঃর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৯। কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

১০। কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১১। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

১২। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

১৩। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

১৪। সমবাহু ত্রিভুজের বাহগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তা সমবাহু হবে।

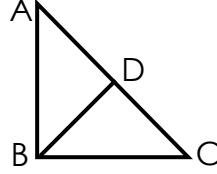
১৫। যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয় তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

১৬। যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয় তবে এদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

১৭। সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তা সমবাহু হবে।

১৮। সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

১৯। ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

২০। চিত্রে। ABC ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।

চিত্রে, $BD = \frac{1}{2} AC$

২১। কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের উপস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

২২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব।

২২। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

২৩। প্রত্যেক ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।

২৪। দুইটি তল পরস্পর ছেদ করলে একটি রেখা উৎপন্ন হয়।

২৫। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, শুধু অবস্থান আছে।

২৬। ইউক্লিড তার 'Elements' গ্রন্থে বিন্দু, রেখা, কোণ, বৃত্ত ইত্যাদি নিয়ে ৫ টি স্বীকার্য প্রদান করেছেন।

২৭। জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণের ধাপ চারটি।

২৮। সমান্তরাল রেখাসমূহের মধ্যবর্তী কোণ $0°$।

২৯। দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল এক সমকোণ বা $90°$ হলে কোণ দুইটি একটি অপরটির পূরক কোণ।

৩০। দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল এক সরলকোণ বা $180°$ হলে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক কোণ।

৩১। দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণ হল প্রবৃদ্ধ কোণ।

৩২। সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহু ও কোণ সমান।

৩৩। ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হলে তা সমদ্বিবাহুএবং কোন বাহু সমান না হলে তা বিষমবাহু ত্রিভুজ।

৩৪। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ $90°$ অপেক্ষা কম, সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ $90°$ এবং স্থুলকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ $90°$ অপেক্ষা বেশি।

৩৫। ত্রিভুজের তিন কোণের সমস্টি $180°$ বা দুই সমকোণ।

৩৬। ত্রিভুজের কোন একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান।

৩৭। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান।

৩৮। ত্রিভুজের যে কোন দুইবাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

৩৯। ত্রিভুজের যে কোন দুইবাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্য তার অর্ধেক।

৪০। সমকোণী ত্রিভুজে, (অতিভুজ)^২ = (লম্ব)^২+(ভূমি)^২

৪১। দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে নিম্নলিখিত উপাত্ত যথাক্রমে সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে:

I. দুইটি অনুরূপ বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ

II. তিনটি অনুরূপ বাহু

III. দুইটি কোণ ও একটি বাহু

IV. একটি কোণ সমকোণ, অতিভুজ এবং একটি বাহু।

সৃজনশীল (CQ)

প্রশ্ন-০১: কু. বো ২০

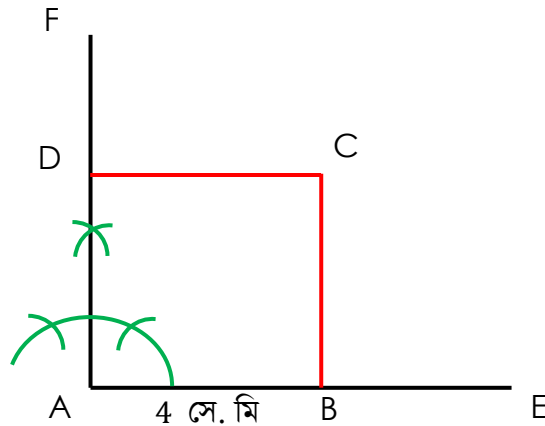
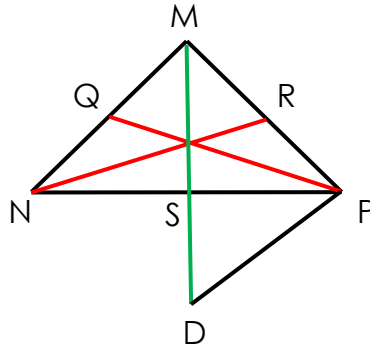
ΔMNP এর Q, R ও S যথাক্রমে MN, MP এবং NP এর মধ্যবিন্দু।

(ক) 4 সে, মি. বাহুর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর। [বিবরণের প্রয়োজন নেই]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{MS + NR + PQ < MN + NP + MP}$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{QR = \frac{1}{2}NP}$ এবং $\mathbf{QR \parallel NP}$.

সমাধান:

ক) $ABCD$ বর্গ অঙ্কন করা হলো যার বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = BC = CD = AD = 4$ সে. মি.।

খ) এখানে ΔMNP এর Q, R ও S যথাক্রমে MN, MP এবং NP এর মধ্যবিন্দু। M, S; N, R এবং Q, P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $MS + NR + PQ < MN + NPMP$.

অঙ্কন: MS কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $MS = SD$ হয়। P, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔMNS ও ΔSPD এ

$NS = SP$ [$\because$ NP এর মধ্যবিন্দু S]

$MS = SD$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $\angle MSN = \angle PSD$ [বিপ্রতিপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore \Delta MNS \cong \Delta MPD$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore MN = PD$

ধাপ ২: ΔMPD -এ

বা, $MP + PD > MD$ [ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $MP + MN > MS + SD$ [$\because PD = MN$ এবং $MD = MS + SD$]

বা, $MP + MN > MS + MS$ [$\because MS = SD$]

বা, $MP + MN > 2MS$

একইভাবে, $MN + NP > 2NR$

এবং, $NP + MP > 2PQ$

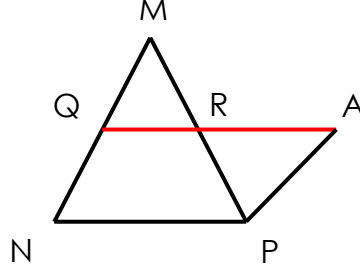
ধাপ ৩:

2(MN+NP+MP [ধাপ ২ হতে]

বা, $MN + NP + MP > MS + NR + PQ$

$\therefore MS + NR + PQ < MN + NP + MP$ **(প্রমাণিত)**

গ) এখানে ΔMNP এর MN ও MP এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও R। Q ও R যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $QR = \frac{1}{2} NP$ এবং $QR \parallel NP$

অঙ্কন: QR কে A পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $QR = RA$ হয়। A, P যোগ করি।

প্রমাণ : ΔMQR ও ΔAPR এর মধ্যে

$QR = AR$ [অঙ্কন অনুসারে]

$MR = PR$ [$\because$ MP এর মধ্যবিন্দু R]

এবং $\angle MRQ = \angle ARP$ [বিপ্রতিপ কোণ]

$\therefore \Delta MRQ \cong \Delta APR$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore MQ = AP$ এবং $\angle QMR = \angle APR$

আবার, Q, MN এর মধ্যবিন্দু বলে $MQ = NQ$

ফলে $NQ = AP$

আবার, $\angle MRQ$ = একান্তর $\angle APR$ বলে $MQ \parallel PQ$ বা $MN \parallel PA$

অর্থাৎ $NQ \parallel PA$

এখন, $NPAQ$ চতুর্ভূজে NQ ও PA পরস্পর সমান ও সমান্তরাল বলে $QA \parallel NP$ হবে।

সুতরাং, $QR \parallel NP$

আবার, $QA = NP$

বা, $QR + AR = NP$

বা, $QR + QR = NP$ [$\because QR = AR$]

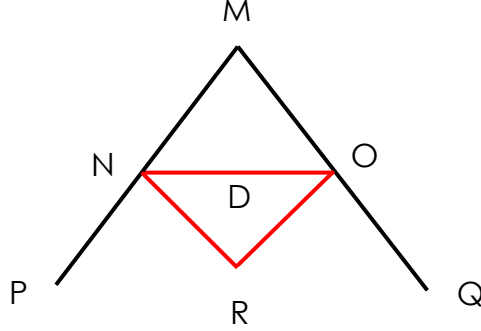
বা, $2QR = NP$

বা, $2QR = NP$

$\therefore \quad QR = \frac{1}{2} NP$

অতএব, $QR = \frac{1}{2} NP$ এবং $QR \parallel NP$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-০২ : ব. বো ২০

চিত্রে, ND=OD, $\angle PNR = \angle ONR$ এবং $\angle QOR = \angle NOR$

(ক) যদি $\angle PNR = 55^\circ$ এবং MN=MO হয়, তবে $\angle NMO$ এর মাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $MN + MO > MD$

(গ) প্রমাণ কর যে, $2\angle NOR + \angle NMO = 180^\circ$.

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে,

$\angle PNR = \angle ONR = 55^\circ$

$\angle PNO = \angle PNR + \angle ONR$

$\qquad = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ$

আবার, $\angle MNP = 180^\circ$ [এক সরলকোণ]

বা, $\angle MNP + \angle PNO = 180^\circ$

বা, $\angle MNP + 110^\circ = 180^\circ$

বা, $\angle MNP = 180^\circ - 110^\circ$

$\therefore \angle MNP = 70^\circ$

আবার, ΔMNO হতে,

$\angle MNO + \angle MON + \angle NMO = 180^\circ$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\angle MNO + \angle MNO + \angle NMO = 180^\circ$ [$MN = MO$ হওয়ায় $\angle MNO = \angle MON$]

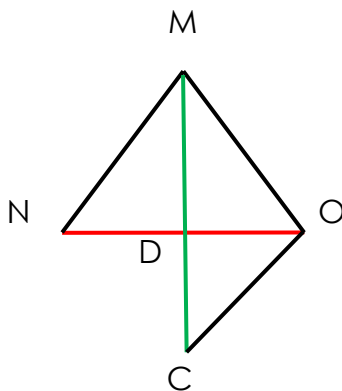
বা, $2\angle MNO + \angle NMO = 180^\circ$

বা, $2 \times 70^\circ + \angle NMO = 180^\circ$

বা, $\angle NMO = 180° - 140°$

$\therefore \angle NMO = 40°$

নির্ণেয় $\angle NMO$ এর মাণ: 40°

খ) এখানে ΔMNP এ $ND = OD$। MD যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $MN + MO > 2MD$

অঙ্কন: MD কে C পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $MD = CD$ হয়। C, O যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔMND ও ΔCOD এ

$ND = OD$ [দেওয়া আছে]

$MD = CD$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $\angle MDN = \angle CDO$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta MND \cong \Delta C$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore MN = COOD$

আবার, $MC = MD + CD$

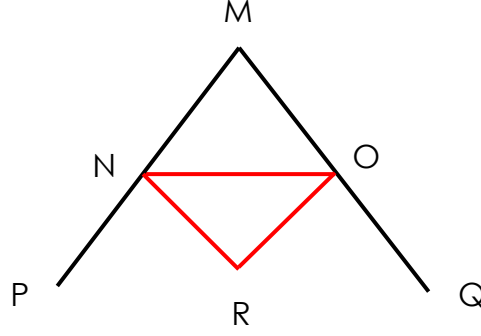
ধাপ ২: এখন ΔMCO -এ

$MO + CO > MC$ [∵ ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $MO + MN > MD + CD$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $MN + MO > MD + MD$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore MN + MO > MD + MD$ **(প্রমাণিত)**

গ) এখানে $\angle PNR = \angle ONR$ এবং $\angle QOR = \angle NOR$

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔMNO এ

$\angle NMO + \angle MON + \angle ONM = 180°$ [∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

ΔMNO এর বহিঃস্থ $\angle PNO = \angle NMO + \angle ONM$

[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান]

অনুরূপভাবে, $\angle QON = \angle NMO + \angle ONM$

ধাপ ২: এখন, ΔNRO এ

$\angle NRO + \angle RNO + \angle NOR = 180°$ [∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\angle NRO + \frac{1}{2}\angle PNO + \frac{1}{2}\angle QON = 180°$ [∵ $\angle PNR = \angle ONR$ এবং $\angle QOR = \angle NOR$]

বা, $\angle NRO + \frac{1}{2}(\angle PNO + \angle MON) + \frac{1}{2}(\angle NMO + \angle ONM) = 180°$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $\angle NRO + \frac{1}{2}(\angle NMO + \angle MON + \angle NMO + \angle ONM) = 180°$

বা, $\angle NRO + \frac{1}{2}(180° + \angle NMO) = 180°$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $\angle NRO + 90° + \frac{1}{2}\angle NMO = 180°$

বা, $\angle NRO = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle NMO$

বা, $\angle NRO = 90° - \frac{1}{2}\angle NMO$

বা, $2\angle NRO = 180 - \angle NMO$

$\therefore 2\angle NRO + \angle NMO = 180°$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-০৩: ঢা. বো. ১৯

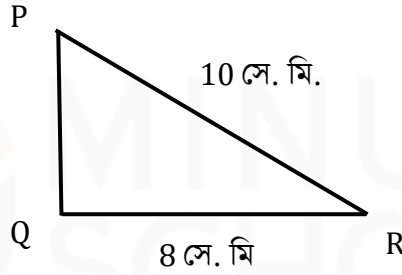
ΔPQR এর $\angle Q$ = এক সমকোণ এবং PR বাহুর মধ্যবিন্দু M.

(ক) $PR = 10$ সে. মি., $QR = 8$ সে. মি. হলে PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, PQ ও QR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N এর সংযোজক রেখাংশ MN এর দৈর্ঘ্য, PR দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান।

(গ) প্রমাণ কর যে, $QM = MR = PM$.

সমাধান:

ক) এখানে ΔPQR এ $\angle Q$ = একসমকোণ, $PR = 10$ সে. মি., $QR = 8$ সে. মি।

PQR সমকোণী ত্রিভুজে

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $PQ^2 + 8^2 = (10)^2$

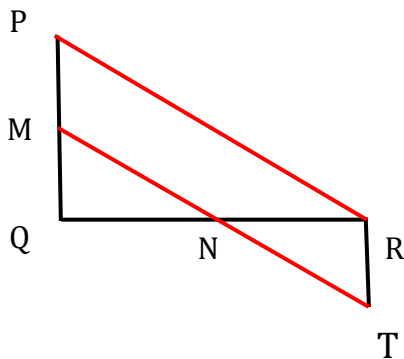
বা, $PQ^2 + 64 = 100$

বা, $PQ^2 = 100 - 64 = 36$

বা, $PQ = \sqrt{36}$

$\therefore PQ = 6$ সে. মি.

$\therefore PQ$এর দৈর্ঘ্য 6 সে. মি.

খ) মনেকরি, ΔPQR এ $\angle Q$ = এক সমকোণ, PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু যথক্রমে M ও N। M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে M ও N এর সংযোজক রেখাংশ MN এর দৈর্ঘ্য, PR দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান অর্থাৎ $MN = \frac{1}{2}$ PR

অঙ্কন: MN কে T পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $MN = NT$ হয়। T এবং R যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔQMN ও ΔTNR এ

$QN = NR$ [দেওয়া আছে]

$MN = NT$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $\angle MNQ = \angle RNT$ [বিপ্রতিপ কোণ]

$\therefore \Delta QMN \cong \Delta TNR$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore QM = RT$

আবার, $\angle QMN = \angle RTN$ এবং $\angle NQM = \angle NRT$ [একান্তর কোণ]

$\therefore QM \parallel RT$ বা $QP \parallel RT$

আবার, $PM = QM = RT$

এবং $PM \parallel RT$

সুতরাং $PMTR$ এ$MT = PR$

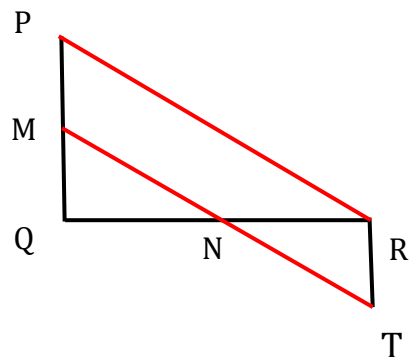
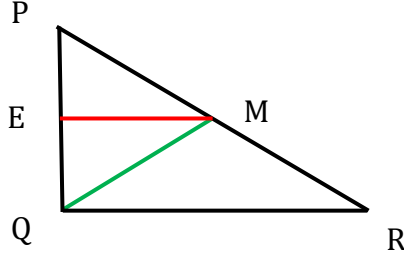
কটি সামান্তরিক।

ধাপ ২: আবার, বা, $MN + NT - PR$ $[\because MT = MN + NT]$

বা, $MN + NT - PR$ $[\because MT = MN + NT]$

বা, $MN + MN = PR$ $[\because NT = MN]$

বা, $2MN = PR$

$\therefore MN = \frac{1}{2} PR$ **(প্রমাণিত)**

গ) মনেকরি, ΔPQR এ $\angle Q$ = এক সমকোণ এবং PR বাহুর মধ্যবিন্দু M। Q, M যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $QM = MR = PM$।

অঙ্কন: PQ এর মধ্যবিন্দু E নিই। EM যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও M।

$\therefore PE = QE$

এবং $PM = MR$

E ও M এর সংযোজক রেখাংশ EM

$\therefore EM \parallel QR$ [∵ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

যেহেতু $QR \perp PQ$ সেহেতু $EM \perp PQ$

$\therefore \Delta PEM$ ও ΔQEM উভয় সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২: ΔPEM ও ΔQEM এ $PE = QE$ [ধাপ (১) হতে]

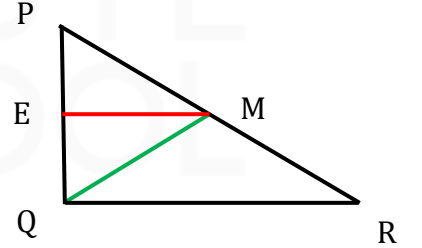
$\angle PEM = \angle QEM$ [উভয়েই সমকোণ]

এবং $EM = EM$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta PEM \cong \Delta QEM$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore PM = QM$

$\therefore QM = MR = PM$

অতএব, $QM = MR = PM$ [ধাপ (১) হতে] **(প্রমানিত)**

প্রশ্ন-০৪ : ব. বো ১৯

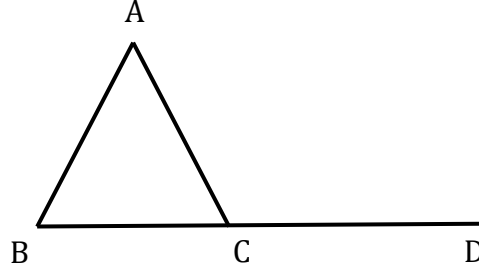
ΔPQR এর PQ ও PR বাহুকে বর্ধিত করলে Q ও R বিন্দুতে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়।

(ক) সমদ্বিবাহু ΔABC এ $AB = AC, \angle BAC = 70°$ এবং BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করলে $\angle ACD$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) QR বাহুর মধ্যবিন্দু M হলে, প্রমাণ কর যে, $PQ + PR > 2PM$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $2\angle QOR = 180° - \angle QPR$.

সমাধান:

ক)

দেওয়া আছে, ΔABC –এ $AB = AC$

$\therefore \angle ABC = ACB$

এখানে, $\angle BAC = 70°$

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180° - 70°$

বা, $2\angle ABC = 110°$

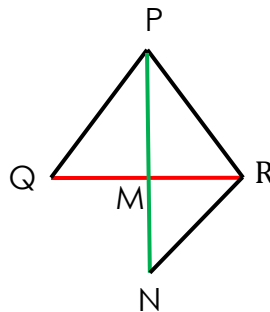
বা, $\angle ABC = 55°$

এখন, ΔABC-এর

বহিঃস্থ $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

$= 55° + 70°$

$= 125°$ **(Ans.)**

খ) বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এর QR বাহুর মধ্যবিন্দু M। PM যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ + PR > 2PM$।

অঙ্কন: PM কে N পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন, $MN = PM$ হয়। N, R যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔPQM ও ΔNRM ত্রিভুজদ্বয় এ

$QM = MR$ [$\because$ M, QR এর মধ্যবিন্দু]

$PM = MN$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং $\angle PMQ = \angle NMR$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ $\Delta PQM \cong \Delta NRM$

$\therefore$ $PQ = RN$

ধাপ ২: ΔPRN-এ

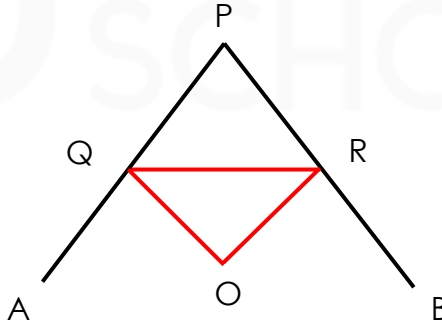
$PR + RN > PN$ [ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $PR + PQ > PN$ [ধাপ-১]

বা, $PQ + PR > PM + MN$

বা, $PQ + PR > PM + PM$

$\therefore$ $PQ + PR > 2PM$ **(প্রমাণিত)**

গ)

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এর PQ বাহুকে যথাক্রমে A ও B বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করলে Q ও R বিন্দুতে উৎপন্ন বহিঃস্থ ∠AQR এবং ∠BRQ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, 2∠QOR = 180° - ∠QPR.

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔPQR-এ ∠P + ∠Q + ∠R = 180 [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

ধাপ ২: ΔPQR-এর বহিঃস্থ ∠AQR = ∠P + ∠R

[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত দুই কোণের সমষ্টির সমান]

$\therefore \frac{1}{2}\angle AQR = \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle R$

$\therefore \frac{1}{2}\ \angle OQR = \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle R$

অনুরুপভাবে, $\frac{1}{2}\ \angle OQR = \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle Q$

ধাপ ৩: ΔOQR-এ

$\angle QOR\ +\ \angle OQR\ +\ \angle ORQ\ =\ 180°$

বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle R \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle Q = 180°$ [ধাপ ২ হতে]

বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2} + (\angle P + \angle Q + \angle R) = 180°$

বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2} \times 180° = 180°$ [ধাপ ১ হতে]

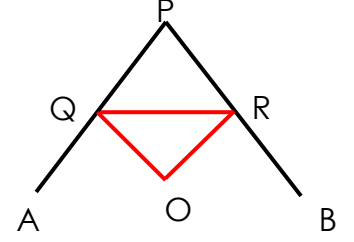
বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle P + 90° = 180°$

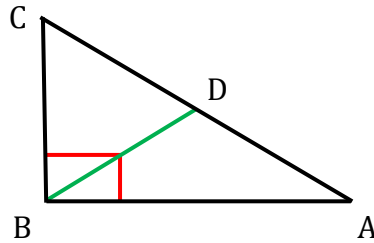
বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle P = 180° - 90°$

বা, $\frac{2\angle QOR + \angle P}{2} = 90°$

বা, $2\angle QOR + \angle P\ = 180°$

বা, $2\angle QOR + \angle QPR\ = 180°$

$\therefore\ 2\angle QOR = 180° - \angle QPR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-০৫ : এয়াজশাহী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ, রাজশাহী

ΔABC এর মধ্যমা BD এবং $\angle C\ =\ 2\angle A.$

(ক) $\angle A$ **এর মাণ বের কর।**

(খ) দেখাও যে $2BD = AC$

(গ) প্রমাণ কর যে, AC **এর দৈর্ঘ্য** BC **এর দ্বিগুণ।**

সমাধান:

ক) ΔABC-এ, $\angle B$ =এক সমকোণ= $90°$

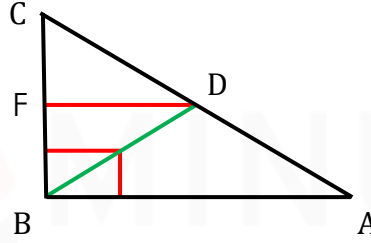
এবং $\angle C = \angle 2a$

এখন, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\angle A + 90° + 2\angle A = 180°$

বা, $3\angle A = 90°$

$\therefore\ \angle A = 30°$ **(প্রমাণিত)**

খ) বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এ $\angle B =$ এক সমকোণ। তাহলে D অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $2BD = AC$

অঙ্কন: ED যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔABC-এর E এবং D যথাক্রমে BC এবং AC এর মধ্যবিন্দু। [অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]

$\therefore\ ED \parallel AD$ [ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

$\therefore\ \angle CED =$ অনুরূপ $\angle EBA =$ এক সমকোণ [কল্পনা]

ধাপ ২: ΔCED এবং ΔBRD এর মধ্যে

$CE = BE$ [E, CB মধ্যবিন্দু]

$ED = ED$ [সাধারণ বাহু]

অন্তর্ভুক্ত $\angle CED =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BED$ [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]

$\therefore\ \Delta CED \cong \Delta BRD$

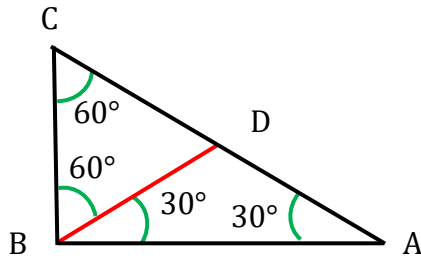
$\therefore\ CD = BD$

ধাপ ৩: $CD = \frac{1}{2}AC.$ [$\because$ D, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore BD = \frac{1}{2}AC.$ [ধাপ ২ হতে]

$\therefore 2BD = AC.$ **[দেখানো হলো]**

গ) দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B = $ এক সমকোণ, $\angle C = \angle 2A$ এবং BD মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = 2BC$

প্রমাণ: 'ক' হতে,

$\angle A = 30°$

$\therefore \angle C = 90° - \angle A \quad [\because \angle B = 90°]$

$= 90° - 30°$

$= 60°$

আবার, 'খ' হতে,

$BD = \frac{1}{2}AC = AD = CD \qquad [\because$ BD মধ্যমা]

এখন, ΔBCD এ,

$BD = CD$

$\therefore \angle BCD = \angle CBD = 60°$

আবার, $\angle BCD + \angle BDC + \angle CBD = 180°$

বা, $\angle BDC = 180° - 60° - 60°$

$\therefore \angle BDC = 60°$

অর্থাৎ, ΔBCD এর তিনটি কোণই সমান।

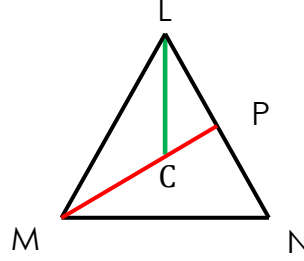
$\therefore$ ΔBCD সমবাহু ত্রিভুজ

$\therefore BC = CD$

তাহলে, $AC = 2CD$

$\therefore AC = 2BC$ **(প্রমাণিত)**

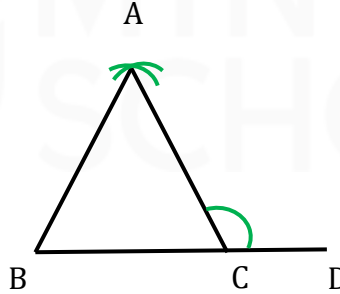
প্রশ্ন-০৬ : রা. বো. ১৯

চিত্রে, $LM = MN$ এবং $\angle LMN$ এর সমদ্বিখণ্ডক MP রেখাংশ LN কে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(ক) একটি সমবাহু ত্রিভুজের চিত্র এঁকে যে কোন একটি বহিঃস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $MN + LN +> LC + MC$

(গ) প্রমাণ কর যে, $MP \perp LN$.

সমাধান:

ক) ABC সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো। ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি। ফলে বহিঃস্থ $\angle ACB$ উৎপন্ন হয়।

ABC সমবাহু ত্রিভুজে $\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60°$

[∵ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°]

এখানে $\angle ACD + \angle ACB = 180°$

বা, $\angle ACD + 60° = 180°$

বা, $\angle ACD = 180° - 60°$

$\therefore \angle ACD = 120°$

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর পরিমাণ $120°$।

খ) এখানে, ΔLMN এ $LM = MN$ এবং$\angle LMN$ এর সমদ্বিখণ্ডক MP রেখাংশ LN কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN + LN +> LC + MC$।

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔMNP-এ

$MN + PN > MP$ [ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর]

$MN + PN > MC + CP$ [$\because MP = MC + CP$]

ধাপ ২: ΔLPC-এ

$LP + CP > LC$ [ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর]

ধাপ ৩: $MN + PN + LP + CP > MC + CP + LC$ [ধাপ ১ ও ২ হতে]

বা, $MN + PN + LP > LC + MC$

$\therefore MN + LN > LC + MC$ [$\because PN + LP = LN$] **(প্রমাণিত)**

গ) এখানে, ΔLMN এ $LM = MN$ এবং $\angle LMN$ এর সমদ্বিখণ্ডক MP রেখাংশ LN কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MP \perp LN$

প্রমাণ:

ধাপ ১: ΔLMP এবং ΔMNP এ

$LM = MN$ [স্বীকার]

$\angle LMP = \angle NMP$ [$\because \angle LMN$ এর সমদ্বিখণ্ডক MP]

এবং $MP = MP$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta LMP \cong \Delta MNP$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle MPL = \angle MPN$

ধাপ ২: যেহেতু $\angle MPL$ এবং $\angle MPN$ কোণদ্বয় রৈখিকযুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান।

সেহেতু $\angle MPL = \angle MPN =$ একসমকোণ।

$\therefore MP \perp LN$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-০৭ :

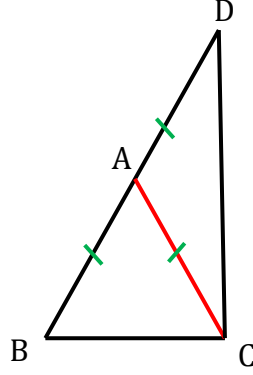
ΔABC এর $AB = AC, BA$ কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AD = AC$ হয়। C, D যোগ করা হল।

(ক) উদ্দীপকের ভিত্তিতে চিত্র আঁক।

(খ) প্রমাণ কোর যে, $BC + CD > 2AC$

(গ) প্রমাণ কোর যে, $\angle BCD =$ এক সমকোণ।

সমাধান:

ক)

খ) দেওয়া আছে, $AB = AC$ এবং অঙ্কন অনুসারে $AC = AD$

ΔBCD এ

$BC + CD > BD$ [ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $BC + CD > AB + AD$

বা, $BC + CD > AD + AD$

বা, $BC + CD > 2AD$

$\therefore BC + CD > 2AC$ [$\because AB = AC = AD$]

গ) দেওয়া আছে, $AB = AC$ সুতরাং $\angle ABC = \angle ACB$

অর্থাৎ, $\angle DBC = \angle ACB$

অঙ্কন অনুসারে $AC = AD$ সুতরাং $\angle ADC = \angle ACD$

অর্থাৎ, $\angle BDC = \angle ACD$

ΔBCD এ

$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD =$ দুই সমকোণ। [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান]

বা, $\angle ACD + \angle ACB + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

বা, $\angle BCD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

বা, $2\angle BCD =$ দুই সমকোণ।

$\therefore \angle BCD =$ এক সমকোণ।

প্রশ্ন-০৮ :

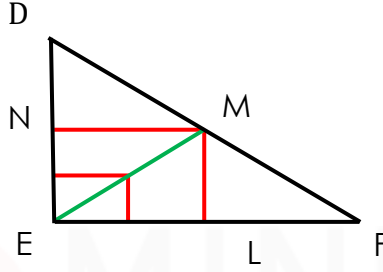
DEF সমকোণী ত্রিভুজের $\angle E$ = এক সমকোণ এবং L, M ও N যথাক্রমে EF, FD ও DE বাহুর মধ্যবিন্দু।

(ক) L ও M, E ও M এবং N ও M যোগ করে প্রদত্ত বর্ণনা অনুসারে একটি চিত্র আঁক।

(খ) দেখাও যে, $\Delta DNM \equiv \Delta ENM$

(গ) প্রমাণ কোর যে, $EM = \frac{1}{2} DF$

সমাধান:

ক)

খ) N ও M যথাক্রমে DE ও FD বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore NM \parallel EF$ [$\because$ ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য তার অর্ধেক]

আবার, M ও L যথাক্রমে FD ও EF বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore ML \parallel DE$ [একই কারণে]

তাহলে, $\angle DNM = \angle E$ [অনুরূপ কোণ]

কিন্তু $\angle E = 1$ সমকোণ।

$\therefore \angle DNM = 1$ সমকোণ।

আবার, $\angle DNE = 1$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।

বা, $\angle DNM + \angle ENM = 2$ সমকোণ।

বা, 1 সমকোণ $+ \angle ENM = 2$ সমকোণ।

বা, $\angle ENM = 2$ সমকোণ $- 1$ সমকোণ।

$= 1$ সমকোণ।

এখন ΔDNM ও ΔENM –এ

$DN = EN$ [$\because N, DE$ এর মধ্যবিন্দু]

MN উভয়ই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

অন্তর্ভুক্ত $\angle DNM$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ENM$ [উভয়ই সমকোণ]

$\therefore \Delta DNM \equiv \Delta ENM$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

গ) 'খ' থেকে পাই, $\Delta DNM \equiv \Delta ENM$

$\therefore \angle NDM = \angle NEM$

বা, $\angle EDM = \angle DEM$

এখন, ΔDEM-এ, $\angle EDM = \angle DEM$

$\therefore EM = DM$

[যদি কোন ত্রিভুজের দুটি কোণ পরস্পর সমান হয়তবে এদের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হবে]

য়াবার 'খ' এর অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\Delta DNM \equiv \Delta ENM$

$\therefore \angle LEM = \angle LFM$

বা, $\angle FEM = \angle EFM$

অর্থাৎ, ΔEFM-এ, $\angle FEM = \angle EFM$

$\therefore FM = EM$

বা, $FM + EM = EM + EM$ [উভয় পক্ষে EM যোগ করে]

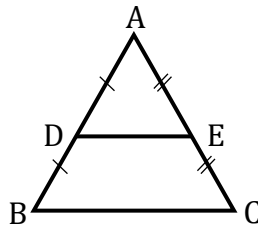
বা, $2EM = FM + EM$

বা, $2EM = FM + DM$ [$\because EM = DM$]

বা, $2EM = DF$

$\therefore EM = \frac{1}{2} DF$.

বহুনির্বাচনী (MCQ)

১।

চিত্রে $BC || DE$ এবং $AB = 8\ cm$, $BC = 6\ cm$ হলে- [মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চবিদ্যালয়,ঢাকা]

i. DE = 3 cm

ii. AD = 4 cm

iii. ΔABC ও ΔADE সদৃশ

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: ঘ

২। সমতলীয় জ্যামিতিতে- [মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চবিদ্যালয়,ঢাকা]

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: খ

৩। প্রবৃদ্ধ $\angle BDC$ এবং $\angle BDC$ এর সম্পুরক কোণের অন্তর কত ডিগ্রি?

(ক) $314°$ (খ) $210°$ (গ) $180°$ (ঘ) $135°$ উত্তর: গ

৪। ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডিত BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে ত্রিভুজটি-

[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চবিদ্যালয়,ঢাকা]

(ক) সমকোণী ত্রিভুজ (খ) সমবাহু ত্রিভুজ (গ) সূক্ষকোণী ত্রিভুজ (ঘ) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উত্তর: ঘ

৫। $\angle A$ ও $\angle A$ পরস্পর পূরক এবং $3\angle A = 2\angle B$ হলে $\angle A =$ কত?[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ,ঢাকা]

(ক) $18°$ (খ) $36°$ (গ) $54°$ (ঘ) $72°$ উত্তর: খ

৬। ইউক্লীডের স্বীকার্য অনুযায়ী- [রা. বো. '১৭]

i. রেখার প্রান্ত বিন্দু নাই

ii. যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, তাই রেখা

iii. তলের প্রান্ত হলো বিন্দু

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

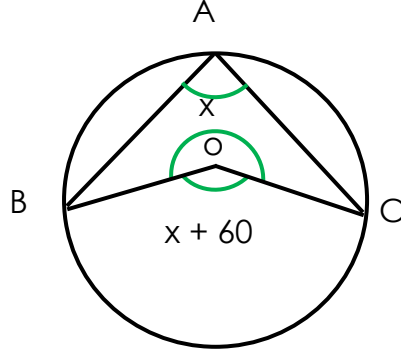
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: ক

৭। ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহ কয়টি সমকোণ তৈরি করে? [ঢা. বো. '১৯]

(ক) ৮ (খ) 9 (গ) 12 (ঘ) 16 উত্তর: গ

৮। $\Delta PQR -$ এর $\angle Q = 90°$ এবং $\angle Q = 2\,\angle R$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? [ব. বো. '১৬]

(ক) $PQ = 2QR$ (খ) $PR = 2PQ$ (গ) $QR = 2PQ$ (ঘ) $PQ = 2PR$ উত্তর: গ

প্রবৃদ্ধ উদ্দীপক থেকে ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে o বৃত্তের কেন্দ্র

৯। $\angle BAC =$ কত? [ঢা. বো. '১৯]

(ক) 30° (খ) 45° (গ) 60° (ঘ) 120° উত্তর: গ

১০। প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle BOC$ এর মান কত?

(ক) 120° (খ) 180° (গ) 240° (ঘ) 280° উত্তর: গ

১১। কে "Elements" গ্রন্থটি রচনা করে?

(ক) পীথাগোরাস (খ) টলেমি (গ) ইউক্লিড (ঘ) ব্রহ্মগুপ্ত উত্তর: গ

১২। প্রাচীন কোন সভ্যতার যুগে জ্যামিতির প্রণালীবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়?

(ক) আদিম (খ) গ্রীক (গ) মধ্যযুগীয় (ঘ) আধুনিক উত্তর: খ

১৩। ঘন বস্তুর মাত্রা কতটি?

(ক) ১টি (খ) ২টি (গ) ৩টি (ঘ) ৪টি উত্তর: গ

১৪। নিচের কোনটির যথাযথ সংজ্ঞা দেয়া সম্ভব নয়?

(ক) বিন্দু (খ) কোণ (গ) ত্রিভুজ (ঘ) চর্তুভুজ উত্তর: ক

১৫। নিচের কোনটি স্থানের উপসেট নয়?

(ক) বিন্দু (খ) সরলরেখা (গ) সমতল (ঘ) কোণ উত্তর: ঘ

১৬। P ও Q ভিন্ন দুটি বিন্দু হলে, $P\ Q$ সংখ্যাটি –

(ক) ধণাত্মক (খ) ঋণাত্মক (গ) শূন্য (ঘ) কাল্পনিক উত্তর: ক

১৭। C বিন্দ A ও B বিন্দুর অন্তর্বতী বলা হবে, যদি –

(ক) A, C ও B একই সরল রেখায় অবস্থিত না হয়

(খ) ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু না হয়

(গ) $AC + CB = AB$ হয়

(ঘ) C যদি AB এর মধ্যবিন্দু হয় উত্তর: গ

১৮। দুটি সন্নিহিত কোণের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় যদি বিপরীত রশ্মি হয়, তবে কোণ দুটিকে বলা হয় -

(ক) সরলকোণ (খ) সন্নিহিত কোণ (গ) পূরক কোণ (ঘ) রৈখিক যুগল কোণ উত্তর: ঘ

১৯। $180° - x$ কোণের সম্পূরক কোণ কত ডিগ্রি?

(ক) $90°$ (খ) $x°$ (গ) $x° + 90°$ (ঘ) $x° + 180°$ উত্তর: ঘ

২০। $\angle A = x°$ এবং $\angle B$ এবং $\angle A$ এর পরিপূরক কোণ $\angle B =$?

(ক) $x°$ (খ) $y°$ (গ) $90° + x°$ (ঘ) $90° - x°$ উত্তর: খ

ব্যাখ্যা:

$\angle B$ যদি $\angle A$ এর পরিপূরক কোণ হয়,

তবে $\angle A + \angle B = 90°$

$\therefore x° + \angle B = 90°$

$\therefore \angle B = 90° - x°$

২১। তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 7 সে. মি.।

(ক) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (খ) সমবাহু ত্রিভুজ

(গ) বিষমবাহু ত্রিভুজ (ঘ) ত্রিভুজ আঁকা যাবে না উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা:

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহু সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। যেহেতু $3 + 4 = 7$, সেহেতু ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নয়।

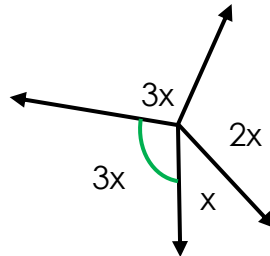
২২। ΔABC এর অভ্যন্তরে D যে কোন বিন্দু হলে, কোনটি সঠিক?

(ক) $AB + AC > BD + DC$ (খ) $AB + BD > AC + DC$

(গ) $AB + AC > BD + DC$ (ঘ) $AB + BD > AC + DC$ উত্তর: ক

২৩। ইউক্লিড তার গ্রন্থ "Elements" এ কয়টি প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দিয়েছেন?

(ক) 465 (খ) 456 (গ) 430 (ঘ) 465 উত্তর: ক

২৪।

চিত্রানুসারে $\angle X$ এর মান কত?

(ক) $20°$ (খ) $30°$ (গ) $40°$ (ঘ) $60°$ উত্তর: গ

ব্যাখ্যা:

$3x + 3x + x + 2x = 360°$

$\Longrightarrow 9x = 360°$

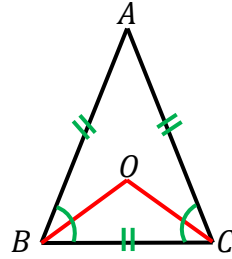
$\therefore x = 40°$

২৫। সমতল কোনটির উপসেট?

(ক) Space (খ) বিন্দু (গ) রেখা (ঘ) রেখাংশ উত্তর: ক

২৬। কোনটি জ্যমিতিক কোন নয়?

(ক) 1 সমকোণ (খ) 0° (গ) 360° (ঘ) 450° উত্তর: ঘ

২৭।

ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle BOC$ এর মান কোনটি?

(ক) 90° (খ) 150° (গ) 120° (ঘ) 135° উত্তর: গ

২৮। সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কী তৈরি হয়?

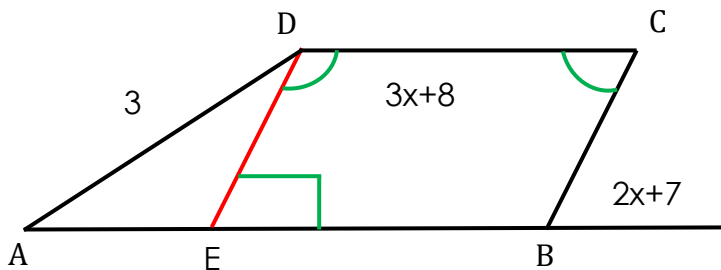
(ক) সমকোণ (খ) সরল কোণ (গ) কোণ (ঘ) বর্গক্ষেত্রফল উত্তর: গ

২৯। কোন যুগলকে সমকোণী ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত হিসেবে বিবেচনা কয়া যাবে?

(ক) 60° ও 36° (খ) 40° ও 50° (গ) 30° ও 70° (ঘ) 80° ও 26° উত্তর: খ

৩০। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি শিরঃকোণের দ্বিগুন হলে, শিরঃকোণের পরিমাণ কত?

(ক) 30° (খ) 35° (গ) 36° (ঘ) 38° উত্তর: গ

প্রবৃদ্ধ উদ্দীপক থেকে ৩১, ৩২ ও ৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে $AB \parallel DC$ এবং $AB \parallel BC$

৩১। x এর মান কত ডিগ্রি?

(ক) $15°$ (খ) $30°$ (গ) $33°$ (ঘ) $41°$ উত্তর: গ

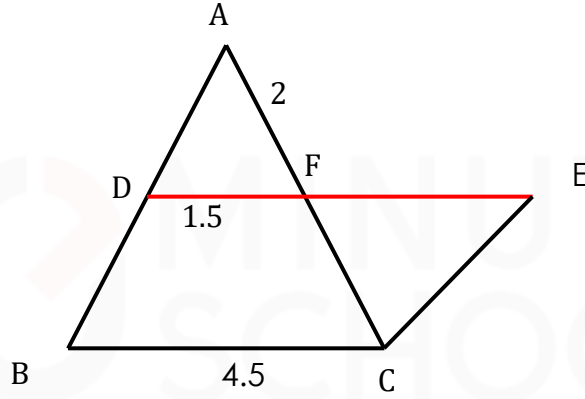
৩২। বৃহত্তর কোণ কত ডিগ্রী?

(ক) $100°$ (খ) $107°$ (গ) $120°$ (ঘ) $180°$ উত্তর: খ

৩৩। ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃস্থ কোণ দুইটি উৎপন্ন হয় তাদের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হলে-

(ক) $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ (খ) $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

(গ) $\angle BOC + 180° = 90°$ (ঘ) $\angle BOC = 180° - \frac{1}{2}\angle A$ উত্তর: ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৪ ও ৩৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ABC একটি ত্রিভুজ ও $BCED$ একটি সামান্তরিক।

৩৪। EF অংশের দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 1.5 (খ) 2.5 (গ) 3 (ঘ) 4 উত্তর: গ

৩৫। CF অংশের দৈর্ঘ্য কত?

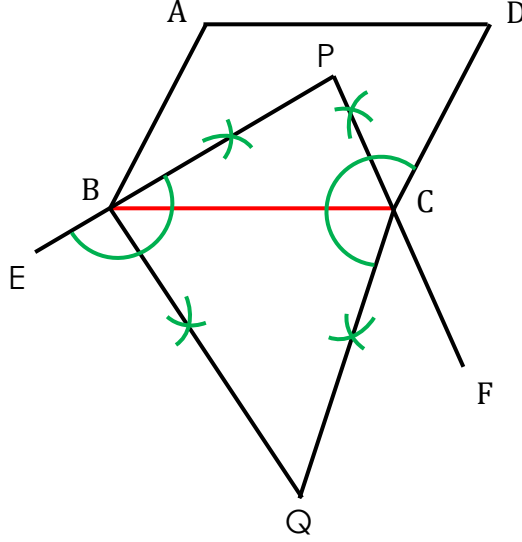
(ক) 2 (খ) 2.5 (গ) 3 (ঘ) 4 উত্তর: ঘ

৩৬। ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যে কোন বিন্দু। তাহলে $2PA^2 - PC^2 =$ কত?

(ক) PB^2 (খ) AB^2 (গ) AC^2 (ঘ) BC^2 উত্তর: ক

৩৭। সূক্ষ্মকোণের পূরক কোণ কোনটি?

(ক) সরলকোণ (খ) স্থূলকোণ (গ) সমকোণ (ঘ) সূক্ষ্মকোণ উত্তর: ঘ

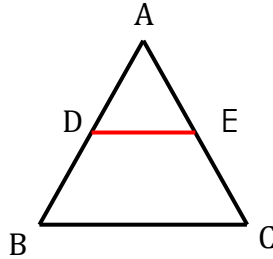
নিচের তথ্যের আলোকে (৩৮ ও ৩৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে. $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার $\angle ABC = 50°$. PB, PC, QB, QC যথাক্রমে $\angle ABC, \angle DCB, \angle CBE, \angle BCF$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং $AB \parallel DC$.

৩৮। $\angle BPC$ এর মান কত?

(ক) $45°$ (খ) $60°$ (গ) $90°$ (ঘ) $75°$ উত্তর: গ

৩৯। $\angle BQC$ অংশের দৈর্ঘ্য কত?

(ক) $30°$ (খ) $45°$ (গ) $60°$ (ঘ) $90°$ উত্তর: খ

৪০।

ΔABC এর AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, Δ ক্ষেত্র $ADE : \Delta$ ক্ষেত্র ABC = কত?

(ক) 1 : 4 (খ) 4 : 1 (গ) 1 : 2 (ঘ) 2 : 1 উত্তর: ক

৪১। কোন ক্ষেত্রে ΔPQR অঙ্কন সম্ভব হবে?

(ক) $\angle P = 60°, \angle Q = 50°, \angle R = 70°$ (খ) $\angle P = 50°, \angle Q = 50°, \angle R = 80°$

(গ) $PQ = 4cm, QR = 7cm, PR = 11cm$ (ঘ) $PQ = 6cm, QR = 9cm, PR = 12cm$ উত্তর: ঘ

৪২। ΔABC এর AD একটি মধ্যমা। $AD = 3,\ BC = 4$ হলে, $AB^2 + AC^2$ এর মান কত?

(ক) 26 (খ) 13 (গ) 25 (ঘ) 50 উত্তর: ক

৪৩। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে-

i. ত্রিভুজ একটি রেখচিত্র

ii. ত্রিভুজ একটি সামতালিক ক্ষেত্র

iii. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: ঘ

৪৪। AD = কত সে. মি.?

(ক) $\frac{X}{3}$ সে. মি. (খ) $\frac{2X}{3}$ সে. মি. (গ) $\frac{X}{2}$ সে. মি. (ঘ) $\frac{3X}{6}$ সে. মি. উত্তর: খ

৪৫। x = কত সে. মি.?

(ক) 6 সে. মি. (খ) 5 সে. মি. (গ) 4 সে. মি. (ঘ) 2 সে. মি. উত্তর: ক

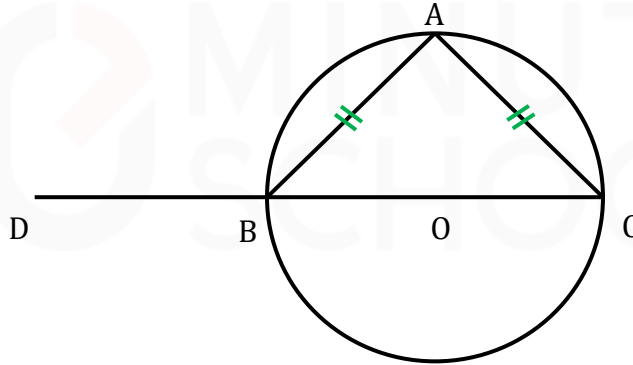
৪৬। ΔPQR এ $\angle Q = 90°$ এবং $\angle P = 2\angle R$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $PQ = 2QR$ (খ) $QR = 2PQ$ (গ) $PR = 2PQ$ (ঘ) $PQ = 2PR$ উত্তর: গ

৪৭।

চিত্রে,

i. $\angle ABC = 45°$

ii. $\angle BAC = 30°$

iii. $\angle ABD = 135°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: খ

৪৮। ত্রিভুজ আঁকতে প্রয়োজন-

i. তিনটি বাহু

ii. একটি কোণ একটি বাহু

iii. দুইটি বাহু ও তাদের মধ্যবর্তী কোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: খ

৪৯। $\angle A$ ও $\angle B$ পরস্পর পূরক এবং $3\angle A = 2\angle B$ হলে $\angle A$=?

(ক) $12°$ (খ) $24°$ (গ) $36°$ (ঘ) $60°$

৫০। O কেন্দ্রবিশিষ্ট MNP বৃত্তে $OM = 10$ সে. মি. হলে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?

(ক) 298.16 (খ) 301.16 (গ) 314.16 (ঘ) 324.16

৫১। একটি ত্রিভুজের-

i. বহিঃর্বৃত্তগুলো বাহুকে স্পর্শ করে

ii. আন্তর্বৃত্ত শীর্ষকগুলোকে স্পর্শ করে

iii. পরিবৃত্ত শীর্ষকগুলোকে স্পর্শ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii